☐ **A13** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 7 + \frac{1}{n}$

• en revenant à la définition démontrer que la suite (u_n) converge vers 7

• écrire un programme Python qui demande d'entrer un réel $\varepsilon > 0$ puis affiche le plus petit entier naturel n_0 tel que :

si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 7| < \varepsilon$.

Corrigé

Il faut démontrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 7| < \varepsilon$.

Analyse

$$|u_n - 7| = \left|7 + \frac{1}{n} - 7\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$|u_n - 7| < \varepsilon$ s'écrit : $\frac{1}{n} < \varepsilon$, puis par passage aux inverses : $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse

Notons n_0 le plus petit entier naturel tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, on a : $n \geqslant n_0$ et $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

On a : $0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$ puis par passage aux inverses : $\varepsilon > \frac{1}{n}$, autrement dit : $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Or, on a vu que : $\frac{1}{n} = |u_n - 7|$, donc : $|u_n - 7| < \varepsilon$.

Conclusion

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 7| < \varepsilon$.

Ceci qui montre que la suite (u_n) converge vers 7.

Programme Python

```python
def u(n:int):
    return 7+1/n
epsilon=eval(input("epsilon="))
n=1
while round(abs(u(n)-7),10)>=epsilon:
    n=n+1
print("n0=",n)
```

☐ **A13 bis** **10 min** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n+5}{n+1}$

En revenant à la définition démontrer que (u_n) converge vers 3.

Corrigé

Il faut montrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 3| < \varepsilon$.

Analyse

$$|u_n - 3| = \left|\frac{3n+5}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+5}{n+1} - \frac{3(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{3n+5-(3n+3)}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

On a :

$$0 < \frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

Par passage aux inverses :

$$\frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

puis en divisant par $2 > 0$:

$$n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Synthèse

Notons n_0 le plus petit entier naturel tel que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $n \geqslant n_0$ et $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ donc $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$

d'où : $n + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ puis en divisant par $2 > 0$:

$$\frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

On a donc :

$$\frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

d'où par passage aux inverses :

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

Or, on a vu que :

$$\frac{2}{n+1} = |u_n - 3|$$

donc : $|u_n - 3| < \varepsilon$.

<u>Résumons</u>

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 3| < \varepsilon$.

Ce qui montre que la suite (u_n) converge vers 3.

☐ **A14** $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{2} + \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n^2}}$

1. **Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 2| < 0{,}05$.**
2. **Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 2| < 0{,}01$.**
3. **En revenant à la définition démontrer que (u_n) converge vers 2.**

<u>Corrigé</u>

1. Déterminons un entier n_0 tel que $\left|u_{n_0} - 2\right| < 0{,}05$.

<u>Analyse</u>

$$|u_n - 2| < 0{,}05$$
$$\left|2 + \frac{1}{n^2} - 2\right| < 0{,}05$$
$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < 0{,}05$$

Or, $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ donc :

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{20}$$
$$n^2 > 20$$
$$n > \sqrt{20}$$

$n_0 = 5$ convient.
(+synthèse, N.R.)

2. Déterminons un entier n_0 tel que $\left|u_{n_0} - 2\right| < 0{,}01$.

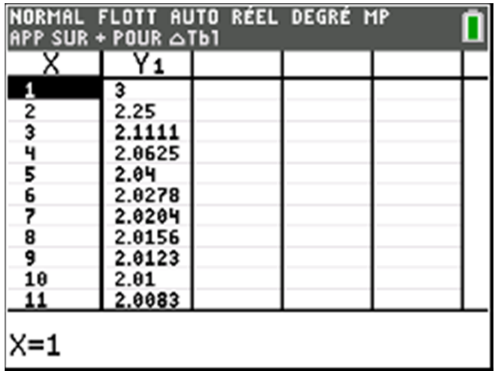
<u>Analyse</u>

$$|u_n - 2| < 0{,}01$$
$$\left|2 + \frac{1}{n^2} - 2\right| < 0{,}01$$
$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < 0{,}01$$
$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100}$$
$$n^2 > 100$$
$$n > 10$$

$n_0 = 11$ convient.
(+synthèse, N.R.)

<u>Vérification à l'aide de la calculatrice pour la question 2</u>

Avec la calculatrice, on obtient un échec jusqu'à u_{10} :


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
1	3
2	2.25
3	2.1111
4	2.0625
5	2.04
6	2.0278
7	2.0204
8	2.0156
9	2.0123
10	2.01
11	2.0083

X=1

3. En revenant à la définition démontrons que (u_n) converge vers 2.

<u>Analyse</u>

$$|u_n - 2| < \varepsilon$$
$$\left|2 + \frac{1}{n^2} - 2\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$$

Or, $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$, donc : $0 < \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Par passage aux inverses :

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Synthèse

Soit $\varepsilon > 0$, notons n_0 le plus petit entier naturel tel que : $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, on a : $n \geqslant n_0$ et $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, donc :

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} > 0$$

d'où : $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, puis par passage aux inverses : $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Or, on a vu que : $|u_n - 2| = \frac{1}{n^2}$, donc : $|u_n - 2| < \varepsilon$.

Résumons

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 2| < \varepsilon$..

Ce qui montre que la suite (u_n) converge vers 2.